第9講　相対論に関わる問題

1

図1のHMはハーフミラーで，光路に対して45°の角度で置かれている。AとBはそれぞれ，光路に対して垂直に置かれた2つの平面鏡の上の点である。HMのO点に，図の左から入射した単色光は透過光と反射光に分かれる。透過光は平面鏡のA点で反射された後，さらにHMのO点で反射されて光検出器Dに到達する。一方，反射光は平面鏡のB点で反射された後，HMのO点を透過して光検出器Dに到達する。

2つの平面鏡のO点からの距離をOA−OB＝dになるように置き，入射光の波長を変化させていくと，光路O→A→O→Dと，光路O→B→O→Dを経た光の干渉によって，Dで検出される光の強度が変化する。以下の問いに答えよ。

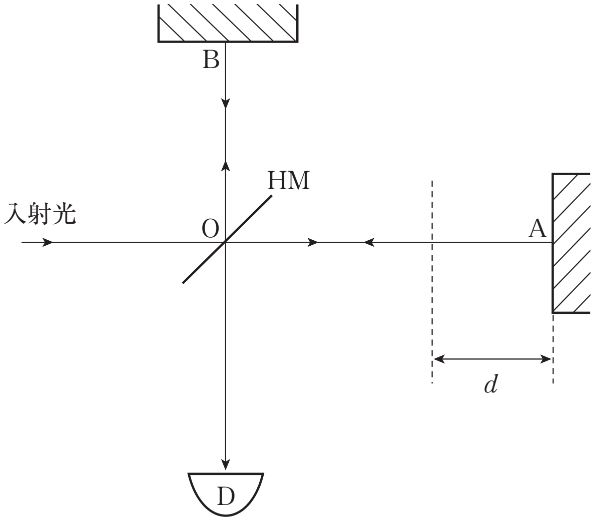


図1

まず，入射単色光の波長を変えていくと，ある波長λ_1で検出される光の強度が極大値を示した。

(1)　このときの，dとλ_1の関係を整数mを用いて表せ。

λ_1から波長を長くしていくと，いったん検出光の強度が減少した後，再度増加をはじめ，波長λ_2で極大値を示した。

(2)　このときの，dとλ_2の関係を(1)の整数mを用いて表せ。

(3)　(1)と(2)の結果を用いて，mとdをそれぞれλ_1，λ_2を用いて表せ。

＜ Note ＞

次に，図２に示すようにＡ点を Δd だけＯ点に近づけ，Ｏ点とＡ点との間に厚さ t の透明平行板を挿入した。ただし，透明平行板の屈折率を n とし，$t < d - \Delta d$ とする。

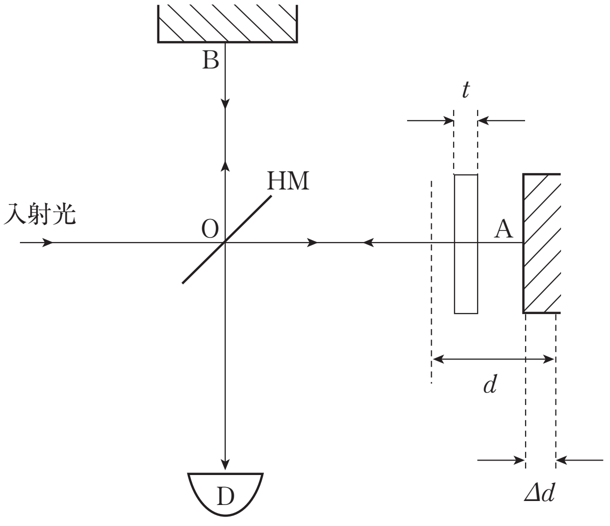


図２

この状態で入射光の波長を変えて検出光の強度を測定したところ，⑴と同じ波長 λ_1 で極大値を示した。

⑷　このときの，d，Δd，t，n，λ_1 の間に成り立つ関係を整数 l を用いて表せ。

λ_1 から波長を長くしていくと，いったん検出光の強度が減少した後，再度増加をはじめ，⑵と同じ波長 λ_2 で極大値を示した。

⑸　整数 l と⑴の整数 m との関係を示せ。

＜ Note ＞

2

波動現象は物理学で重要な役割を果たしている。波動に関する下記の文中の空欄 (ア) から (シ) にあてはまる式または数値を記せ。数値計算の答は有効数字２桁まで求めよ。

(1)　風のないおだやかな日，岸辺に立っているＫ君に向かって，Ｍさんの乗った船がまっすぐ一定の速度 v で近づいてくる。船のスピーカーの出す振動数 f の音がＫ君にどのように聞こえるかを次のように考えよう。ただし，音速を V とする。

船のスピーカーから出る音波の波形は，１秒あたり (ア) 個の山をもっている。ある時刻に発生した山Ｐと，その１秒後に発生した山Ｑに注目する。ＰがＫ君に到達して１秒後には，ＱはＫ君を (イ) 通り過ぎている。よって，Ｑはこれより (ウ) 前にすでにＫ君に届いている。つまり，スピーカーから１秒間に発生する (ア) 個の山は，Ｋ君には (エ) の間に届いたことになる。したがって，Ｋ君に聞こえる音の振動数は $f' =$ (オ) となる。

(2)　今度は，Ｋ君の持っているラジオから出た振動数 f [Hz] の音がＭさんにどう聞こえるかを考える。ある時刻 T にＭさんに到達した山をＲ, その１秒後に到達した山をＳとする。時刻 T にＭさんがいた位置に止まっている観測者がいたとすると，この観測者にＳが到達するのは時刻 T より (カ) 後である。この観測者にはラジオから発生した音がそのままの振動数で聞こえるはずなので，Ｍさんに聞こえる音の振動数は $f'' =$ (キ) である。

(3)　小問(1)で考えた，船から出た音をＫ君が聞く場合をＭさんの立場で考えよう。Ｍさんにとっては，Ｋ君が速度 v でまっすぐ近づいてくるようにみえる。これは，(2)で，ＭさんとＫ君の立場をちょうど入れかえたことになっている。(1)の答えを求めるのに，(2)で求めた結果がそのまま使えると一見思える。ところが，f' と f'' は等しくない。これは，Ｍさんが空気に対して動いているため，Ｍさんにとっての見かけの音速 V' が V と異なっていると考えれば理解でき，この２つの間の関係は $V' =$ (ク) となる.

(4)　Ｋ君のラジオと船のスピーカーから振動数 332Hz のテスト信号が鳴ったところ，Ｋ君は 10 秒あたり 80 回のうなりを観測した。音速を 340m/s とすると，船の速度は (ケ) であり，このとき，Ｍさんは 10 秒あたり (コ) 回のうなりを観測する。

(5)　宇宙人の住む天体Ｘが地球に向かってまっすぐ速度 v で接近している。この天体から地球に向けて発射された光が地球上で観測された。天体Ｘでは振動数 f の光を発射したとしよう。光は，光速 c で伝わるので，地球で測定される振動数 f_1 は(1)の f' の式で V を c におきかえたものである。

さて，天体Ｘからこの過程をみるとどうなるだろうか。宇宙人にとっては，逆に地球が速度 v で天体Ｘに近づいてくるように見える。天体Ｘでこの光の速度が c' であったとすると，地球での振動数 f_2 は(3)と同様に考えて(2)の f'' の式で V を c' におきかえたものとなることがわかる。

この２つは同じ現象を違う立場からみたものなので，結果は等しいはずであり，そのためには(3)の結果と同様に c' と c は異なる値でなければならない。ところが，天体Ｘでも光速は地球と同じ値 c であることが判明した。この矛盾を説明できる可能性として次のような仮説をたてる。

< Note >

> 地球人からみると，地球上で時間が１秒経過する間に，地球に対して速度 v で運動している天体X上では k 秒が経過する。

すると，地球の１秒間に天体Xから発射される光の波形がもつ山の数は f ではなくその k 倍になるので，f_1 も k 倍しなければならない。

もし，物理法則が地球と天体Xとで異ならないならば，同様に次の仮説が成立するはずである。

> 宇宙人からみると，天体X上で時間が１秒経過する間に，天体Xに対して速度 v で運動している地球上では k 秒が経過する。

この仮説を用いると，f_2 は［(サ)］倍されなければならない。このとき，f_1 と f_2 が等しいためには，k＝［(シ)］であればよい。これは，アインシュタインの特殊相対性理論から導かれる結論そのものである。

＜ Note ＞

3

1905年にアインシュタインは，特殊相対性理論，光量子論，ブラウン運動の3つの重要な論文を発表し，現代物理学の扉を開いた。2005年はこの年から100年目を迎えるため，世界物理年としてさまざまな行事が行われた。

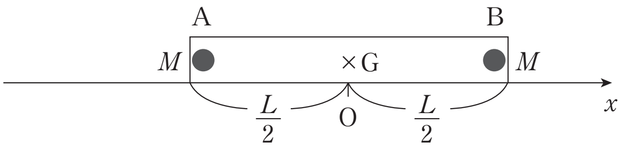


図1

アインシュタインの特殊相対性理論によると，質量はエネルギーの1つの形態であり，質量 m に相当するエネルギーは，$E=mc^2$（c は真空中の光速度）で与えられる。この関係式を導くために次のような考察を行うことがある。

図1のように，摩擦のない水平面におかれた長さ L で質量が無視できる箱の内側に，質量 M の粒子AとBがそれぞれ固定されている。2個の粒子を含めた箱全体の質量は $2M$ であり，水平面にそった座標系の原点を箱の中央Gに合わせれば，箱の重心の x 座標は $x=0$ となる。

粒子AがエネルギーEの光子を1個放出し，この光子が運動量 p をもって x 軸の正の向きに進んだ。このとき粒子Aの質量の一部がエネルギーに転換したため，粒子Aの質量は $M-m$ になったとする。光子を除いた箱全体の質量は $2M-m$ となり，運動量保存則によって箱全体は x 軸の負の向きに一定の速度 v で運動する（図2）。

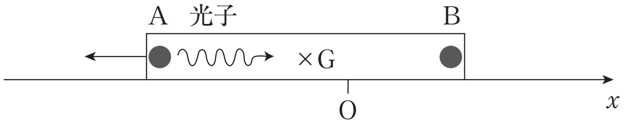


図2

その後光子は粒子Bに衝突して完全に吸収され，光子のエネルギーがふたたび質量 m に転換する。このとき箱は静止したが，はじめの位置から x 軸の負の向きに d だけ移動していた（図3）。また，粒子Aの質量は $M-m$，粒子Bの質量は $M+m$ となった。

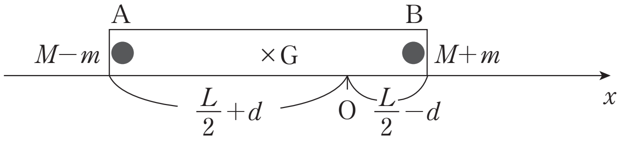


図3

＜ Note ＞

⑴　光子のもつ運動量 p を光子のエネルギー E と光の速さ c で表せ。

⑵　光子が放出される際の運動量保存則から，箱の速度 v を p，M，m で表せ。

⑶　光子が粒子Bに衝突して吸収される際に箱が静止する理由を簡単に述べよ。

⑷　光子が放出されてから吸収されるまでの時間を t とする。この間に速度 v の箱が d だけ移動するので，$t=\dfrac{d}{v}$ となる。この間の光子の運動を考えて，d を L，v，c で表せ。

⑸　箱の内部では光子のやりとりの際に力がはたらくが，箱全体は外部から力を受けない。そこで，光子の放出前と吸収後では，箱全体の重心の座標が変化しないと考えられる。光子を吸収した後の箱全体の重心の x 座標が光子を放出する前の重心の x 座標（$x=0$）に等しいことから，d を L，M，m で表せ。

こうして，⑷と⑸から得られた2つの d の式を等しいとおいて，⑵の v の表式と⑴の式を代入すると，光子のエネルギーと光子の運んだ質量の間の関係式，$E=mc^2$ が得られる。

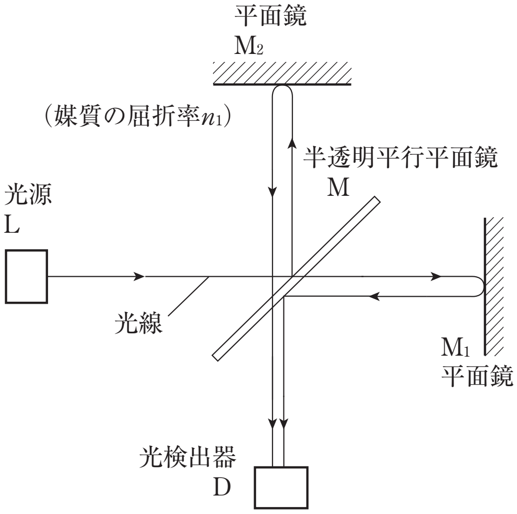
次に，質量から取り出されるエネルギーの大きさを以下で確かめてみよう。

⑹　核分裂反応を利用して，^{235}Uの質量の0.03%がエネルギーに変換されたとする。100kgの^{235}Uから発生したエネルギーを1年間で使用するとき，これは，何Wの仕事率に相当するかを求めよ。光の速さは 3×10^8m/s とし，有効数字は1桁でよい。

＜ Note ＞

第９講　確認テスト

図において，L は波長が真空中で λ_0 [m] の光源，M は光線の一部を通し一部を反射する半透明平行平面鏡，M_1 および M_2 は，それぞれ，M を通過した光線および M で反射された光線に垂直に置かれた平面鏡である。D は光検出器であり，D には２つの光線，すなわち M を通り M_1 で反射されさらに M で反射された光線と，M で反射されたあと M_2 で再び反射されてから M を通過してきた光線が入る。D に入るこの２つの光線は干渉により強めあったり弱めあったりする。いま，装置全体が屈折率 n_1 の媒質の中に置かれており，２つの光線の間には光路差がなく強めあっているものとし，半透明平行平面鏡 M の厚さは無視できるものとして，次の［　　］にあてはまる答え，または最も近い答えを解答群より選べ。



(1)　屈折率 n_1 の媒質においては，光の速さは真空中の光の速さの［ 1 ］倍であり，その振動数は真空中の振動数の［ 2 ］倍であるから，波長が真空中で λ_0 [m] の光源の波長は［ 3 ］$\times\lambda_0$ [m] である。

［ 1 ］の解答群

①　$\dfrac{1}{n_1}$　　②　$\dfrac{1}{2n_1}$　　③　$\dfrac{n_1}{2}$　　④　n_1

［ 2 ］の解答群

①　$\dfrac{1}{n_1}$　　②　$\dfrac{1}{2n_1}$　　③　n_1　　④　1

[3]の解答群

① $\dfrac{1}{n_1}$　② $\dfrac{1}{2n_1}$　③ $\dfrac{n_1}{2}$　④ n_1

(2) 図の状態でMとM_1の間に屈折率n_2（$>n_1$）で厚さt[m]の平行平面膜を光線に垂直に置いたとき，２つの光線の間の光路差は[4]$\times t$[m]となる。

[4]の解答群

① $\dfrac{n_1}{n_2}$　② $\dfrac{n_2}{n_1}$　③ $2\left(\dfrac{n_2}{n_1}-1\right)$　④ $2(n_2-n_1)$

(3) また，図の状態からM_1をd[m]だけゆっくりとMの方向に平行移動したとき，２つの光線の間の光路差は[5][m]となる。このとき，２つの光線は検出器でm回目の強めあう状態になった。mの値はd，n_1とλ_0で表すと[6]である。

[5]の解答群

① n_1d　② $2n_1d$　③ $\dfrac{d}{n_1}$　④ $\dfrac{2d}{n_1}$

[6]の解答群

① $\dfrac{n_1d}{2\lambda_0}$　② $\dfrac{n_1d}{\lambda_0}$　③ $\dfrac{2n_1d}{\lambda_0}$　④ $\dfrac{d}{n_1\lambda_0}$

(4) 設問(3)において，媒質を屈折率1.0の空気とし，真空中の波長がλ_{01}とλ_{02}の２種類の光源（ただし，λ_{02}は未知）について，M_1の移動距離を同じにして強めあう回数m_1，m_2を測定した。λ_{01}が6.3×10^{-7}mのときm_1は3.2×10^3回であり，λ_{02}の場合，m_2は4.0×10^3回であった。この結果から，波長が未知である光源の真空中の波長λ_{02}は[7]$\times10^{-7}$mである。

[7]の解答群

① 1.6　② 3.4　③ 5.0　④ 5.7

第9講　解答

1

(1)　$2d = m\lambda_1$

(2)　$2d = (m-1)\lambda_2$

(3)　$m = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}$，$d = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2-\lambda_1)}$

(4)　$2\{(d-\Delta d)+t(n-1)\} = l\lambda_1$

(5)　$m = l$

2

(ア)　f　(イ)　v　(ウ)　$\dfrac{v}{V}$　(エ)　$1-\dfrac{v}{V}$　(オ)　$\dfrac{V}{V-v}f$

(カ)　$1+\dfrac{v}{V}$　(キ)　$\dfrac{V+v}{V}f$　(ク)　$V-v$　(ケ)　8.0

(コ)　78　(サ)　$\dfrac{1}{k}$　(シ)　$\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}$

3

(1)　$\dfrac{E}{c}$

(2)　$\dfrac{p}{2M-m}$

(3)　光子が生成，伝播，吸収の全過程で，外力は作用しないために全運動量は保存される。はじめ，光子が生成される前に箱は止まっていたので全運動量は0であり，光子が吸収された後，再び箱は止まることになる。

(4)　$\dfrac{v}{c+v}L$

(5)　$\dfrac{m}{2M}L$

(6)　9×10^7 [W]

第９講　確認テスト

【解答】

(1)　1　①　　2　④　　3　①

(2)　4　④

(3)　5　②　　6　③

(4)　7　③

【解説】

(1)　$\underline{\dfrac{1}{n_1}}_{1}$ 倍

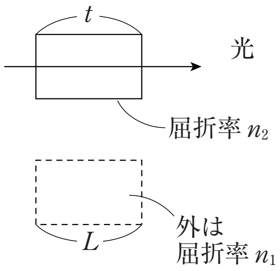
振動数は不変ゆえ $\underline{1}$ 倍$_2$

波長は $c=\nu\lambda$ の関係より $\underline{\dfrac{1}{n_1}}_{3}$ 倍

(2)　膜による光路差は，外と比べ，往復で

$$2\{n_2t-n_1t\}=\underline{2(n_2-n_1)t}_{4}$$

だけ長い。



(3)　M_1 を d ずらすと，光路差は $\underline{2n_1d}_{5}$ ずれる。

この間に m 回明暗の変化をくり返したので

$$2n_1d=m\lambda_0$$

$$\therefore\quad m=\underline{\frac{2n_1d}{\lambda_0}}_{6}$$

(4)

$$\begin{cases}2n_1d=m_1\lambda_{01}\\2n_1d=m_2\lambda_{02}\end{cases}$$

より，

$$m_1\lambda_{01}=m_2\lambda_{02}$$

$$\therefore\quad \lambda_{02}=\frac{m_1}{m_2}\lambda_{01}=\frac{3.2\times10^3}{4.0\times10^3}\times6.3\times10^{-7}=5.04\times10^{-7}$$

$$\fallingdotseq \underline{5.0}_{7}\times10^{-7}\ [\mathrm{m}]$$